# 広島県教員候補者選考試験 2004

# 専門科目 高校数学

（解答は次ページから）

**問題１**

次の方程式を解け.

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ x^2+y^2+z^2=12 \\ x^3+y^3+z^3=24 \end{cases} \tag{1}$$

**解答１**

$x+y+z=\alpha, xy+yz+zx=\beta, xyz=\gamma$ とおくと (1) 式は

$$\begin{cases} \alpha=6 \\ \alpha^2-2\beta=12 \\ \alpha^3-3\alpha\beta+3\gamma=24 \end{cases}$$

となる．以上より $(\alpha,\beta,\gamma)=(6,12,8)$ と求まる．よって $(x,y,z)=(2,2,2)\cdots$(答)

**問題２**

BC=$2\sqrt{3}$,∠BAC=60° である三角形があります．このとき BA+AC を最大にする値を求めなさい．

**解答２**

$\angle\mathrm{ABC} = \theta$ とおくと，$\angle\mathrm{ACB} = 180^\circ - (60^\circ + \theta) = 120^\circ - \theta$.
正弦定理より，

$$\frac{\mathrm{AC}}{\sin\theta} = \frac{\mathrm{BA}}{\sin(120^\circ - \theta)} = \frac{2\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = 4$$

これより，和積の公式を用いると 2 辺の和 BA+AC は

$$\mathrm{BA} + \mathrm{AC} = 4(\sin\theta + \sin(120^\circ - \theta)) = 8\sin 60^\circ \cos(\theta - 60^\circ)$$

となり，最大値は $\theta = 60^\circ$ のとき．

$$\mathrm{Max}(\mathrm{BA{+}AC}) = 8\sin 60^\circ = 4\sqrt{3} \cdots (\text{答})$$

**問題３**

$x^y = y^x$ の解が $x = y$ 以外にも存在することをグラフを用いて証明しなさい．

**解答３**

$x^y = y^x$ の両辺の対数をとり，整理すると

$$y \log x = x \log y$$
$$\frac{\log x}{x} = \frac{\log y}{y}$$

となる．ここで $f(u) = \dfrac{\log u}{u}$ とおくと，$f'(u) = \dfrac{1 - \log u}{u^2}$．増減表は

| $u$ | $0$ | $e$ | | $(+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(u)$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(u)$ | $(-\infty)$ | $\frac{1}{e}$ | | $(0)$ |

となり，そのグラフは図 1 のようになる．

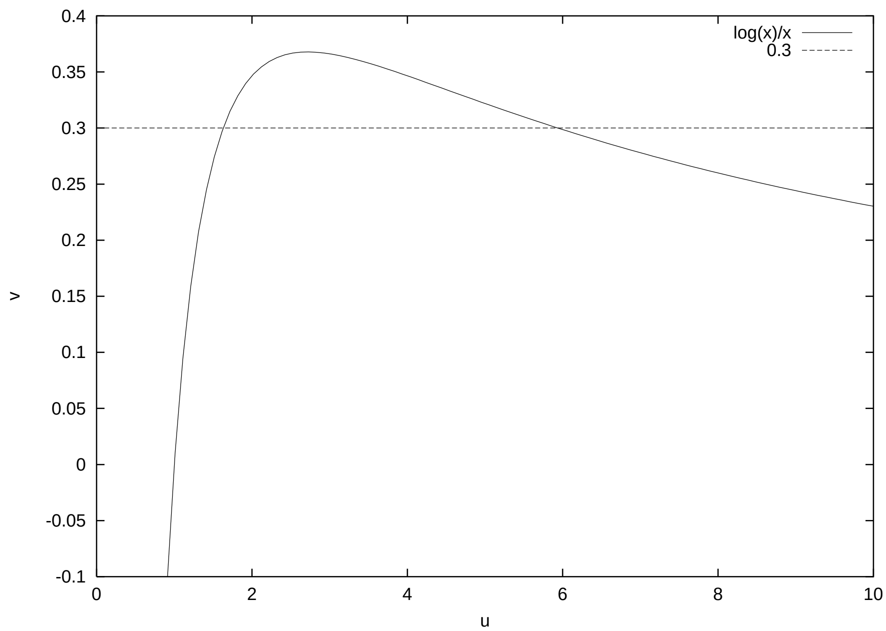


FIG. 1: $v = \dfrac{\log u}{u}$ と $v = k$ のグラフ

グラフより $v = \dfrac{\log u}{u}$ と $v = k$ は $0 < k < \dfrac{1}{e}$ のとき，2 つ解をもつ．$x, y$ それぞれがこれらを満たす相異なる 2 解であれば，$x = y$ 以外の $x^y = y^x$ の解となる．(証明終)

**問題 4**

O(0,0,0),A(1,0,1),B(1,1,0) を結んでできる三角形を $x$ 軸に対して回転させてできる立体の体積 $V$ を求めよ．

**解答 4**

三角形 OAB の平面 $x = t$ $(0 < t < 1)$ による断面を考えると，これは $yz$ 平面での線分 $y + z - t = 0, y > 0, z > 0$ になる．$yz$ 平面での原点から線分への最短距離は線分に下ろした垂線の長さで $\dfrac{t}{\sqrt{2}}$．最長距離は $y, z$ 軸上の点への距離で $t$．この線分を $x$ 軸を中心に回転させせると出来る図形は長径 $t$，短径 $\dfrac{t}{\sqrt{2}}$ の円環になる．この円環の面積 $S(t)$ は

$$S(t) = \pi\left(t^2 - \left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2\right) = \frac{\pi t^2}{2}$$

よって求める図形の体積は，この面積を $[0, 1]$ で積分すればよい．

$$V = \int_0^1 S(x)dx = \frac{\pi}{6} \cdots (\text{答})$$

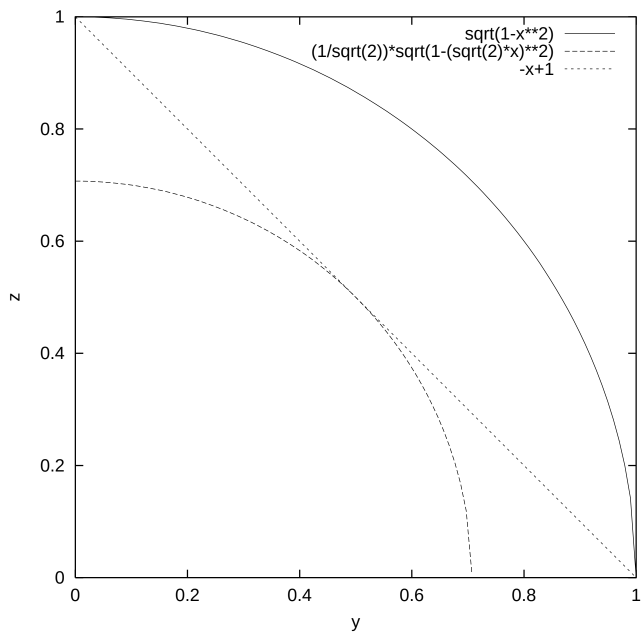


FIG. 2: $x$ 軸を中心として回転した線分の $x = 1$ における $yz$ 平面上での図

**問題 5**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

に対して、 $A^n$ をもとめよ.

**解答 5**

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

と予想し，これを数学的帰納法で示す.

(i) $n = 1$ の場合

これは $A$ に一致するので成立.

(ii) $n = k$ の場合，(2) 式の成立を仮定すると

$$A^{k+1} = A \cdot A^k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2k & 2k(k-1) \\ 0 & 1 & 2k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2(k+1) & 2k(k+1) \\ 0 & 1 & 2(k+1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となり，$n = k + 1$ の場合も (2) 式は成立する.

(i),(ii) から数学的帰納法により，すべての自然数について (2) 式の成立が示された.（証明終）

**問題６**

正 $n$ 角形の $n$ 個の頂点を $\mathrm{A}_1,\mathrm{A}_2,\cdots,\mathrm{A}_n$ とおく．その中心を O とします．このとき

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}_1+\overrightarrow{\mathrm{OA}}_2+\cdots+\overrightarrow{\mathrm{OA}}_n=\overrightarrow{0}$$

であることを証明しなさい．

**解答６（その１）**

$n$ が偶数，奇数の場合で分けて考える．

(i) $n$ が偶数のとき，すなわち $n=2m$（$m$ は自然数）のとき $1\leq k\leq m$ を満たす各 $k$ に対して，２点 $\mathrm{A}_k$ と $\mathrm{A}_{k+m}$ は原点に対して対称である．したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}_k+\overrightarrow{\mathrm{OA}}_{k+m}=\overrightarrow{0}$$

が成り立つ．

$$\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{\mathrm{OA}}_k=\sum_{k=1}^{m}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}_k+\overrightarrow{\mathrm{OA}}_{k+m}\right)=\sum_{k=1}^{m}\overrightarrow{0}=\overrightarrow{0}$$

(ii) $n$ が奇数のとき，すなわち $n=2m+1$（$m$ は自然数）のとき $2\leq k+1\leq m$ を満たす各 $k$ に対して，２点 $\mathrm{A}_k$ と $\mathrm{A}_{2m-k+3}$ は $\mathrm{OA}_1$ に関して対称である．

$\mathrm{OA}_k=\mathrm{OA}_{2m-k+3}$ であり，$\angle\,\mathrm{A}_k\mathrm{OA}_{2m-k+3}$ の 2 等分線は $\mathrm{OA}_1$ となるから，2 つのベクトルの和

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}_k+\overrightarrow{\mathrm{OA}}_{2m-k+3}$$

は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}_1$ のスカラー倍で

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}_k+\overrightarrow{\mathrm{OA}}_{2m-k+3}=\alpha_k\overrightarrow{\mathrm{OA}}_1$$

となる実数 $\alpha_k$ が存在する．したがって

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{\mathrm{OA}}_k &= \overrightarrow{\mathrm{OA}}_1+\sum_{k=1}^{m}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}_k+\overrightarrow{\mathrm{OA}}_{2m-k+3}\right)\\ &= \overrightarrow{\mathrm{OA}}_1+\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\overrightarrow{\mathrm{OA}}_1=\left(1+\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}}_1\end{aligned}$$

となる．ここで $\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{m} \alpha_k$ とおくと

$$\sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{\mathrm{OA}}_k = \alpha \overrightarrow{\mathrm{OA}}_1 \tag{3}$$

と表せる．

正 $n$ 角形は，直線 $\mathrm{OA}_2$ に関しても対称な図形であるから，同様にして

$$\sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{\mathrm{OA}}_k = \beta \overrightarrow{\mathrm{OA}}_2 \tag{4}$$

と表せる．

(3),(4) 式より

$$\alpha \overrightarrow{\mathrm{OA}}_1 = \beta \overrightarrow{\mathrm{OA}}_2 \tag{5}$$

となるが，3 点 $\mathrm{O},\mathrm{A}_1,\mathrm{A}_2$ は同一直線上にないので

$$\alpha = \beta = 0$$

となる．

以上 (i),(ii) より

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}_1 + \overrightarrow{\mathrm{OA}}_2 + \cdots + \overrightarrow{\mathrm{OA}}_n = \overrightarrow{0}$$

が示された．(証明終)

**解答６（その２）**

単位円周に内接する正 $n$ 角形 $\mathrm{A}_1$,$\mathrm{A}_2$,$\cdots$ $\mathrm{A}_n$ を考えると点 $\mathrm{A}_k$ の座標は

$$\mathrm{A}_k\left(\cos\frac{2k\pi}{n},\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$$

とかける．ここで $k=1$ のときの座標 $\mathrm{A}_1$ を複素数表示した

$$z=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$$

を用いると，座標 $\mathrm{A}_k$ はド・モアブルの公式より $z^k$ と表される．

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}_1+\overrightarrow{\mathrm{OA}}_2+\cdots+\overrightarrow{\mathrm{OA}}_n=\overrightarrow{0}$$

は，複素数の和

$$1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}$$

と等価である．

$$1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}=\frac{1-z^n}{1-z}$$

$z\neq 1, z^n=1$ であるから

$$1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}=0$$

となる．よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}_1+\overrightarrow{\mathrm{OA}}_2+\cdots+\overrightarrow{\mathrm{OA}}_n=\overrightarrow{0}$$

もその和がゼロベクトルとなる.（証明終）

**問題 7**

正三角形の 3 点すべてが格子点であるような正三角形は存在しないことを加法定理を用いて証明しなさい.

**解答 7**

正三角形の 1 点を複素数平面上の原点 O に固定する．残りの点を A,B として $\mathrm{A}(a_1, a_2)$($a_1, a_2$ はそれぞれ整数) とおくと，B の座標は

$$(a_1 + ia_2)(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) = \left(\frac{1}{2}a_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}a_2\right) + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a_1 + \frac{1}{2}a_2\right)$$

となり，成分に無理数を含むので格子点上に点 B が来ることはない.（証明終）

**問題８**

数学Ｉの学習指導要領の目標には 不等式を用いて現実問題を解決することが示されているが、その到達目標を判定するための問題を作りなさい

**解答８**

略

**問題9**

I. 2 枚のコインを投げたとき (表, 表)(表, 裏)(裏, 裏) の 3 通りが出るので、(表, 裏) が出る確率は $\dfrac{1}{3}$ であると生徒が答えたとき あなたはその生徒の誤りをどのように指摘してどのように指導しますか その具体的な方法について 説明しなさい.

II. $a^0 = 1 (a > 0)$ とすることに対する説明を 2 通りの方法で説明しなさい

**解答9**

I. 生徒の誤解は順列を用いた考え方と組み合わせを用いた考え方を混同した点にある．確率を考えるとき，出目の総数である分母を組み合わせで考え，出目の分子を順列で考えていた点を生徒に明確に示すことが必要．この場合は分子と分母の両方を順列の考え方で統一するのが簡明.

2 つのコインが区別できたとすると (表, 裏) の他に (裏, 表) の順列も考慮しなければならないので，2 枚のコインを投げたときの表裏の出方は (表, 表)(表, 裏)(裏, 表)(裏, 裏) の 4 通り．したがって表と裏が 1 枚ずつ出る確率は $\dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$ となる.

II.

- 逆元である $a^{-1}$ が $a$ の逆数 $\dfrac{1}{a}$ に対応することを考えて $a^0 = a \cdot a^{-1} = 1$ と考える.
- 単位元 $a^0 \neq 1$ として $a^1 = a^0 \cdot a^1 \neq a$ として矛盾を導き出す.

（この 2 つは群の基本的性質． 2 つのうちどちらか 1 つの説明だけでは，群の説明にはなりえない．両方の方法を合わせて初めて意味がある.）

**問題１０**

2 平面 $2x+3y-z-1=0, x-3y+2z=0$ の交線を含み、もう 1 つの平面 $x-2y-z+3=0$ に垂直な平面の方程式を求めよ.

**解答１０**

2 平面 $2x+3y-z-1=0, x-3y+2z=0$ の交線を含む $x-3y+2z=0$ 以外の任意の平面は，$k$ をパラメータとして

$$2x+3y-z-1+k(x-3y+2z)=(2+k)x+(3-3k)y+(-1+2k)z-1=0 \tag{6}$$

とかける．この平面の法線ベクトル $(2+k, 3-3k, -1+2k)$ と平面 $x-2y-z+3=0$ の法線ベクトル $(1,-2,-1)$ は垂直だから，両者の内積をとると

$$(2+k)-2(3-3k)+1-2k=5k-3=0$$

となり，$k=\dfrac{3}{5}$ となる．これを (6) 式に代入して整理すると，求める平面の方程式

$$13x+6y+z-5=0 \cdots (\text{答})$$

を得る.

**問題１１**

$P_1, P_2, \cdots P_n$ の $n$ 個の袋があります．$P_k$ には赤玉 $k$ 個, 白玉 $n-k$ 個が入っています $(0 < k \leq n)$．これらの袋から 1 つの玉を取り出すとき赤玉が出る確率を求めなさい．

**解答１１**

どの袋を選ぶかは同様に確からしいので確率は袋 $P_k$ を選ぶ確率は $\dfrac{1}{n}$．袋 $P_k$ から赤玉を取り出す確率は $\dfrac{k}{n}$.
したがって袋 $P_k$ を選んで赤玉を出す確率 $A_k$ は

$$A_k = \frac{1}{n} \cdot \frac{k}{n}$$

これを $k = 1, \cdots, n$ で足し合わせて

$$\sum_{k=1}^{n} A_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{k}{n} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n} \cdots (\text{答})$$

が赤玉が出る確率である．

**問題１２**

「解の公式」は中学校での取り扱いが変更されたことに留意して、高校ではどのように指導しますか 簡潔に説明しなさい

**解答１２**

略

以上